極限の応用　「事象を数学で説明しよう」　　　　　（　　）年（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

課題

用紙を適当に折る。その折線に紙の端を合わせて折る。その折線に，反対側の紙の端を合わせて折る。これを繰り返すと折線の位置はどうなりますか。

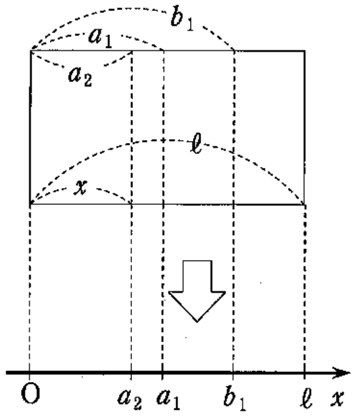
課題

> 用紙を適当に折る。その折線に紙の端を合わせて折る。その折線に，反対側の紙の端を合わせて折る。これを繰り返すと折線の位置はどうなりますか。

(解説)

用紙の短辺に平行に折るとする。このとき，右図のように，用紙長辺の長さを $\ell$ とし，用紙の端から折線までの長さを $x$ と表す。

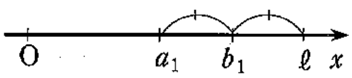
> つまり，右図のように座標軸を設定する。
> 用紙の左端が $x=0$，
> 右端が $x=\ell$ となり，
> それぞれの折線の位置が
> $x=a_n$，$x=b_n$ のように座標で表される。




最初に折った折線の位置を $x=a_1$ とし，次に折った折線は $x=b_1$，次に折った折線は $x=a_2$，次は $x=b_2$ …とする。
（厳密に言えば，$n$，$k$ を自然数とするとき
　$k$ 回目に折った折線の位置を
　　$k=2n-1$ のとき　$x=a_n$
　　$k=2n$　　のとき　$x=b_n$　とする。）

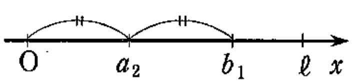
最初に折った折線の位置は $x=a_1$ であり，
次に折った折線は，$x=a_1$ と $x=\ell$ の中点となるから，

$$b_1=\frac{a_1+\ell}{2}$$




次は，$x=0$ と $x=b_1$ の中点となるから，

$$a_2=\frac{b_1}{2}$$




これを繰り返すから，次の漸化式が成り立つ。

$$\begin{cases} b_n=\dfrac{a_n+\ell}{2} \\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n \end{cases}$$

**（立式の完成）**
次の $b_n$ を消去した式でもよい

$b_n$ を消去して　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a_n+\ell}{2}$

すなわち　$a_{n+1}=\dfrac{1}{4}a_n+\dfrac{\ell}{4}$

> 特性方程式
> $x=\frac{1}{4}x+\frac{\ell}{4}$
> $\frac{3}{4}x=\frac{\ell}{4}$ より $x=\frac{\ell}{3}$

変形して　$a_{n+1}-\dfrac{\ell}{3}=\dfrac{1}{4}\left(a_n-\dfrac{\ell}{3}\right)$

よって，数列 $\left\{a_n-\dfrac{\ell}{3}\right\}$ は初項 $a_1-\dfrac{\ell}{3}$（$=A$ とする）

公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列だから，一般項は

$$a_n-\frac{\ell}{3}=A\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\qquad\therefore\quad a_n=A\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{\ell}{3}$$

ここで　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{A\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{\ell}{3}\right\}=\frac{\ell}{3}$

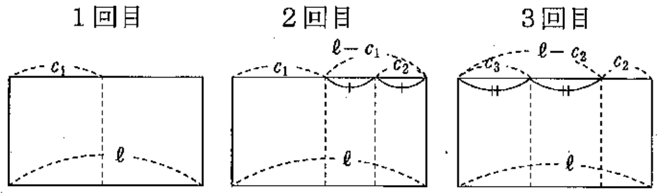
また　$b_n=2a_{n+1}=2A\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}+\dfrac{2\ell}{3}$

であり　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}2a_{n+1}=2\cdot\frac{\ell}{3}=\frac{2\ell}{3}$

ゆえに，$n$ を限りなく大きくするとき，$a_n$ は限りなく $\dfrac{\ell}{3}$ に近づき，$b_n$ は限りなく $\dfrac{2\ell}{3}$ に近づく。

すなわち，最初の折り方に関わらず，折線の位置は，用紙を３等分する位置に近づく。

(別解)　$n$ 回目に折り返すときの端からの長さを $c_n$ とする。
（つまり，奇数回目と偶数回目で $c_n$ が表す端からの長さが左右交互に変わる。）




例えば，上図で左側から１回目を折るとき，
左端から折線までの長さが $c_1$ となる。
次に，右側から２回目を折るので，

右端から折線までの長さが $c_2$ となり，$c_2=\dfrac{\ell-c_1}{2}$

続いて，左側から３回目を折るので，

左端から折線までの長さが $c_3$ となり，$c_3=\dfrac{\ell-c_2}{2}$

これを繰り返すと，一般に次の漸化式が成り立つ。

$$c_{n+1}=\frac{\ell-c_n}{2}\quad\Leftrightarrow\quad c_{n+1}=-\frac{1}{2}c_n+\frac{\ell}{2}$$

変形して　$c_{n+1}-\dfrac{\ell}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(c_n-\dfrac{\ell}{3}\right)$

よって，数列 $\left\{c_n-\dfrac{\ell}{3}\right\}$ は，初項 $c_1-\dfrac{\ell}{3}$（$=C$ とする）

公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列だから，一般項は

$$c_n-\frac{\ell}{3}=C\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\qquad\therefore\quad c_n=C\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{\ell}{3}$$

ここで　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\left\{C\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{\ell}{3}\right\}=\frac{\ell}{3}$