

円錐斬りからのジャイアントスイング

～空間図形の方程式と回転体の体積～

<教材観>

空間における曲面の方程式や不等式が表す図形の体積は、断面の面積の定積分で求めることができる。しかし、数式の変形と対応する立体図形の操作を理解させることは、空間認識力の個人差もあり、難しい。この教材は、ICT機器を用いて立体図形を表現し、様々な視点から立体図形を見ることで生徒のなかの立体のイメージを明確にして、より良い理解に導こうとしたものである。しかし、ICT機器でその瞬間の理解を高めても、アプローチの方法を言語化し、生徒一人一人に残さなければできるようにはならないと考えた。その点を補うために、まとめのプリントや課題プリントを用意して各自で振り返りができるようにした。

教材作成に当たっては、馴染みのある図形である円錐を主題とすることで、空間図形が苦手な生徒が少しでも手を出しやすくなるように配慮した。円錐の方程式について考察させる展開1では、選択問題で提示した。これは、考察の対象を明確にできること、消去法が用いることができるなど様々なアプローチができること、断面を考えさせるサンプルを紹介すること、そして展開2へつなげる内容として、空間の方程式の取り扱いについて学習させることを目的としたものである。展開2では展開1で考察した円錐面の回転体の体積を求める。その際、解法へのアプローチが見つからない学習者に配慮し、ヒントを一人一人が必要に応じて使用できるようクラウド上に用意した。これによってヒントの使用、不使用を学習者が判断して問題に向かうことができ、一斉指導の中で自然と個々の学習段階に合わせた指導ができると考えた。

<指導観>

空間図形のイメージや方程式の処理には個人差があることに留意して、丁寧に指導したい。展開1、2の方程式から得られる円錐面は原点に頂点があり、逆立ちの状態となっている。そこに戸惑う生徒もいるので、必要に応じて指摘すると良い。最後に、指導案は50分授業で作ってあるが、感想には考える時間がもっと欲しいという意見も多く、65分授業や70分程度の補習での実施が望ましい。

1 単元指導計画

(1) 単元名：積分法の応用 体積 (数学Ⅲ)

(2) 単元の目標

定積分を利用して立体の体積を求めることができる。

(3) 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
立体の特徴を捉え、既習内容を活用・工夫して立体の断面積を求めることで、立体の体積を定積分で表そうとしている。	図形の性質や方程式を利用して立体の断面積を求め、立体の体積を定積分で表すことができる。	立体の断面積から定積分を利用して体積を求めることができる。	立体の体積を断面積から定積分を利用して求めることができることを理解している。

(4) 指導と評価の計画 (6 時間)

時間	目標、●活動	評価規準	評価方法
1 時	定積分を利用することで立体の断面積から体積を求めることができることを理解し、断面の図形と底面の図形が相似である角錐などの立体の体積を求めることができる。 ●錐体の体積を求める。	・立体の体積を断面積から定積分を利用して求めることができることを理解している。 【知】	観察 生徒との対話 ノート
2 時	立体の断面から、定義された図形の断面積 $S(x)$ を求め、体積を求めることができる。 ●球、柱体、錐体以外の立体の体積を求める。	・立体の断面から立体の概形を捉えることができる。 【考】 ・立体の特徴を捉え、既習内容を活用・工夫して立体の断面積を求めることで、立体の体積を定積分で表そうとしている。 【関】	観察 生徒との対話 ノート
3 時	曲線 $y=f(x)$ と x 軸及び 2 直線 $x=a$ 、 $x=b$ で囲まれた部分を、 x 軸の周りに一回転させてできる立体の体積を求めることができる。 ● x 軸や y 軸の周りに一回転させてできる立体の体積を求める。	・回転体の体積の公式を理解している。 【知】 ・立体の体積を求めることができる。 【技】	観察 生徒との対話 ノート
4 時	2 曲線で囲まれた部分を回転させてできる立体の体積を求めることができる。 ●円環体の体積を求める。	・立体の概形を捉えることができる。 【考】 ・立体の体積を求めることができる。 【技】	観察 生徒との対話 ノート
5 時	媒介変数表示された曲線を回転させてできる立体の体積を求めることができる。 ●サイクロイド曲線と x 軸で囲まれた部分を x 軸の周りに一回転させてできる立体の体積を求める。	・媒介変数表示された曲線を回転させてできる図形の体積を定積分で表すことができる。 【考】 ・立体の体積を求めることができる。 【技】	観察 生徒との対話 ノート
6 時 本時	空間における方程式が表す図形をその断面から捉え、回転させてできる図形の体積を求めることができる。 ●円錐面の方程式を考察する。 また立体を回転させた図形の体積を求める。	・空間図形の方程式を数学的論拠に基づいて判断したり導出することができる。 【考】 ・平面による切り口をもとに立体図形を捉えようとしている。 【関】	観察 生徒との対話 プリント アンケート

2 学習指導案

日 時	令和〇年〇〇月〇〇日		指 導 者	〇〇 〇〇
指導クラス	3年〇〇クラス (理系数学Ⅲ応用クラス)		場 所	岐阜県立〇〇高等学校 〇〇教室
単 元 名	積分法の応用 体積		使用教材	授業者用 PC インタラクティブペン 生徒のスマートフォン
教 材 観	積分法の応用は、いろいろな曲線で囲まれた図形の面積や立体の体積及び曲線の長さを求めるなかで、積分の有用性を感じることができる単元である。その中で「体積」は、初めて積分による体積の求め方を扱うので、数学Ⅱからの発展を明確に感じることができる単元である。しかし、空間図形を想起して、空間図形の断面積を求めることは難しく、様々な考え方を身に付けさせる必要がある。			
ク ラ ス 観	理系の3クラスを4分割したクラスで、数学Ⅲの応用問題を学習している。学習への意識と基本的な知識の理解度が高い生徒が多く、難しい問題を粘り強く考えたり、全体の前で自主的に発表したりする生徒もいる。しかし、公式を誤って用いたり、問題へのアプローチが全く浮かばず思考が止まってしまうたりする生徒の様子も見られるため、理解の確認が必要である。			
指 導 観	積分の計算を省き、円錐面の方程式の導出やその回転体の断面積の求め方をテーマとして授業を展開する。その際、ICT機器を有効に用いることで授業の効率を高め、考察する時間と生徒の反応を見る時間をできる限り設けることで、生徒が主体的に必要な知識を獲得できるよう指導したい。また、課題を与えて家庭で生徒が自分の理解を確認できるよう指導したい。			
単元の目標	定積分を利用して立体の体積を求めることができる。	本時の位置	6 / 6	
本時の目標	空間図形の方程式を求めることができる。 空間図形の断面を考察し、体積を定積分で表すことができる。			
評 価 規 準	<ul style="list-style-type: none"> 空間図形の方程式を数学的論拠に基づいて判断したり導出することができる。【考】 平面による切り口をもとに空間図形を捉えようとしている。【関】 			
本 時 の 展 開				
過程 (時間)	学 習 項 目 (指導のねらい)	学 習 活 動 (□：指示・説明、○：発問・活動)	指導上の留意点・観点別評価 (→：評価方法、★：ICT利用)	
導 入 (6) 分	本時の目標を伝える。特に、体積の計算と関連付けて、見通しをもたせる。	<input type="checkbox"/> 空間図形の定義を説明する。 <input type="checkbox"/> 知っている空間図形の方程式について発問する。 <input type="checkbox"/> 本時の目標を提示する。	★デジタル教科書を用いて、効率よく復習させる。 ・ここでは空間における曲面の方程式についての生徒の知識を確認する。 ・球面の方程式と平面の方程式は必ず確認する。 ★興味深い方程式が出てきた場合には、グラフ描画ソフトを用いて表示する。	
		目標 1 円錐面の方程式を求めることができる。 目標 2 円錐面を回転させてできる立体の体積を求めることができる。		

<p>展開 1 (18) 分</p>	<p>空間図形の方程式について考察する中で、方程式から空間図形を捉えるアプローチの方法を学習する。</p>	<p>□課題 1 を提示する。</p> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>底面の半径が 1、高さが 1 の円錐面（円錐の側面）を表す方程式を次の選択肢から選び、スマホで返答しなさい。また、それが円錐面であると判断した理由を答えなさい。</p> $z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (0 \leq z \leq 1), \quad z = x^2 + y^2 \quad (0 \leq z \leq 1)$ $z = x + y \quad (0 \leq z \leq 1)$ </div> <p>○各自で考察する。(8分) ○課題①にスマートフォンで回答する。 □集計結果を表示する。 ○どのように判断したかについて発表する。</p> <p>□立体の断面を用いて正解を解説する。</p> <p>□$z = x^2 + y^2 \quad (0 \leq z \leq 1)$ や $z = x + y \quad (0 \leq z \leq 1)$ の表す立体について確認する。</p>	<p>★アプリケーションソフトを用いて課題①を配付する。 ・プリント①を配付する。</p> <p>・正解、不正解は言わない。 ・まずは挙手で答えさせたいが、挙手がない場合には指名する。それでも難しい場合は相談させる。 ・$z=k$ における断面と $y=k$ における断面(円錐曲線)から判断する方法、またベクトルを用いる方法を想定している。 ★生徒の状況に合わせて、円錐を座標空間上に表示した円錐を映す。 ・空間図形の方程式を数学的論拠に基づいて判断したり、導出することができる。【考】 →プリント、生徒との対話 ★2通りの断面で説明する。 ★3つの方程式で考えるので、効率よく解説する。 ・一つの値を固定して、平面における図形を考えればよいことを理解させる。</p>
<p>展開 2 (20) 分</p>	<p>断面積を求める方法を考察させて理解を確認する。</p>	<p>□課題 2 を提示する。</p> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>$z^2 = x^2 + y^2 \quad (0 \leq z \leq 1)$ を y 軸のまわりに一回転するとき、その図形の体積を定積分の式で表しなさい。</p> </div> <p>○各自で考察する。(5分) □5分後に周りの人と相談しても良いことを伝える。(5分) □断面積の導出について解説する。</p>	<p>・プリント②を配付する。</p> <p>★プリント②のガイドの使用は各自で選択するように伝える。 ・平面による切り口をもとに空間図形を捉えようとしている。【関】 →プリント、机間指導 ★視覚的に理解させるだけでなく、生徒が実際に問題を解くことをイメージして説明する。</p>

まとめ (6分)	本時の内容をまとめ、定着をはかる。	○まとめのプリントとアンケートに答える。 □演習問題を家で実施するように指示する。	・プリント③とプリント④を配付する。 ★アプリケーションソフトを用いて問題を配付する。
-------------	-------------------	--	--

3 使用する ICT 機器及びデジタルコンテンツ

- ・実物投影機 ・プロジェクタ ・電子黒板 ・デジタル教科書 ・グラフ描画ソフト
- ・プレゼンテーションソフト ・アンケート集計ソフト

4 授業後のアンケート結果

質問項目	◎	○	△	×
円錐面の方程式について、十分に考察できたか。	15	13	6	0
円錐面の方程式の導出について、理解できたか。	16	17	1	0
回転体の体積の式について、十分に考察できたか。	10	17	7	0
回転体の体積の式の導出について、理解できたか。	15	17	2	0
図形の映像は見やすかったか。	22	12	0	0
白板の文字は見やすかったか。	23	10	0	1
今日の授業について、自由に感想を述べなさい。				
<ul style="list-style-type: none"> ・映像があったので、図形の動かし方や回転してできあがる図形がわかりやすかった。 ・図形が映像できれいに見えた。 ・映像があるとイメージしやすかった。仲間の発言を聞いてすごいと思った。解説を聞くと今までに習ったことを活用してできることだったので面白かった。 ・発表してくれた3人が素晴らしいと思った。 ・新しい授業方式だったが、立体の回転体がどのようにできるかわかりやすい映像だった。 ・空間図形の方程式をみんなで考えたのは良かったし、ホワイトボードも見やすかった。 ・自分の発想と違う意見が聞けて良かった。自分で考える時間をもっと欲しいと思ったが、ちょうどよかったかもしれない。グループで他の意見も聞いてみたい。先生の説明が早口だけどわかりやすかった。映像で空間図形がすんなり理解できたが、起動が遅かった。 ・図形が動いたのでわかりやすかった。誘導が丁寧で自力で解こうとすることができた。 ・積分の考え方を使うとわかりやすかった。 ・立体の図がわかりやすい。 ・回転体についてより興味をもつようになった。 ・映像が分かりやすく、これからも使ってほしい。 ・スクリーンに映る図形は捉えやすくて良かった。 ・円錐面の方程式の導出は触れたことがあったのですが、自信をもって解けず反省。 ・回転体の体積を求めるところはガイド付きがなければ手も足も出なかった。 ・今まで図形ばかりに注目していたので方程式から攻めたのは新鮮でした。 ・新たな知識が増えて良いと思った。 ・映像のおかげでどんな図形か明確に理解できた。授業の説明がとてもわかりやすかった。 ・図形の映像が見やすくて、イメージしやすかった。 ・動きを見ることができたので、イメージが付きやすいと思った。 ・方程式の導出ではy軸で切る方法しか頭になかった。面積は難しくできていなかった。 ・図をうまく書けなかったので、y=tで切った断面図で少し悩んだ。 ・立体図形を把握するという作業がなかなかできず苦戦した。 ・映像のおかげでどのように図形ができるか見ることができて良かった。 ・新しさを感じた。それぞれもっと考える時間があれば良かったです。 ・円錐面の体積を考えたが、最後詰んでしまって悔しかった。3人の発表は正解かどうかは別として、そんな考え方もあるのかと勉強になった。空間図形は図で描くのが難しいので今日の授業のように映像があるとわかりやすいと思った。 				